目次

第1章

小鳥遊六花(邪王真眼(最強))はチューリング完全を凌駕する

— @xhl_kogitsune

映画「中二病でも恋がしたい！ -Take On Me-」[*1] はいいぞ。

—

小鳥遊六花は (まだ) 中二病であり、会話中でも中二病的な二つ名や脚注を多用する。
六花「おはよう勇太**括弧**ダークフレームマスター**括弧閉じ**! 今日はこの小鳥遊六花**括弧**邪王真眼**括弧**最強**括弧閉じ括弧閉じ**と約束された探索へと旅立つのだ!」
勇太「お前よく話しながら括弧の対応取れるな」
しかし、これはこれで面白いので、六花がどこまで括弧の対応関係を取れるのか試してみた。

1.1 邪王真眼括弧最強括弧プリーステスよりも最強括弧閉じ括弧閉じ

勇太「邪王真眼よ、汝は邪王真眼**括弧**最強**括弧閉じ**を称しているが、今日は星の巡りがよく、汝は平時よりも一段強い! 「最強」に加え「プリーステスよりも最強」をも名乗れるのではないか?!」
六花「なん、だと……? つまり、邪王真眼が邪王真眼**括弧**最強**括弧閉じ**[*2] となっただけではなく、今日の私は邪王真眼**括弧**最強**括弧閉じ括弧**プリーステスよりも最強**括弧閉じ**[*3] だというのか!?」
勇太「もう一声」
六花「邪王真眼**括弧**最強**括弧**プリーステスよりも最強**括弧閉じ括弧閉じ**[*4]」
勇太「よし」
六花「?」
括弧閉じを連発する六花かわいい。そう思いながら俺は更に続ける。
勇太「もう一声」
六花「邪王真眼**括弧**最強**括弧閉じ括弧**最強**括弧閉じ括弧**プリーステスよりも最強**括弧閉じ**[*5]」
勇太「もう一声」
六花「邪王真眼**括弧**最強**括弧閉じ括弧**最強**括弧**プリーステスよりも最強**括弧閉じ括弧閉じ**[*6]」
勇太「もう一声」
六花「邪王真眼**括弧**最強**括弧**最強**括弧閉じ括弧閉じ括弧**プリーステスよりも最強**括弧閉じ**[*7]」

[*1] http://www.anime-chu-2.com/
[*2] 邪王真眼(最強)
[*3] 邪王真眼(最強)(プリーステスよりも最強)
[*4] 邪王真眼(最強(プリーステスよりも最強))
[*5] 邪王真眼(最強)(最強)(プリーステスよりも最強)
[*6] 邪王真眼(最強)(最強(プリーステスよりも最強))
[*7] 邪王真眼(最強(最強))(プリーステスよりも最強)

1.2　邪王真眼括弧最強括弧閉じ中括弧最強中括弧閉じ

勇太「よし、じゃあ**括弧**の種類を増やしてみるのはどうだ?」
六花「邪王真眼**中括弧**最強**中括弧閉じ**[*10]」
勇太「いいんじゃないか」
六花「邪王真眼**小括弧**最強**中括弧**最強**中括弧閉じ小括弧閉じ**[*11]」
勇太「いいんじゃないか!」
六花「でも、種類が増えてもあまり変わらない」
勇太「うーん、そうか……」
　ここいらで六花の更なる力を試して見るか。
勇太「じゃあ、力を更に高めるため自ら戒めを追加するのはどうだ? そうだな……こういうプログラムが出力するやつだけに限るっていうのはどうだ?」

```
f() {
  switch(...) {
    case 0: print("("); f(); print("}"); return;
    case 1: print(")"); f(); print("{"); return;
    case 2: return;
  }
}
```

図 1.1: 例 1(プログラム版)

六花「`switch(...)` の中身は?」
勇太「そこは 0 でも 1 でも 2 でも自由に分岐して構わない」
六花「最強は?」
勇太「適当に付けてくれ」
六花「むむむ……ちょっとよく分からない」
勇太「そうか……? ちなみに文脈自由文法だとこんな感じで書けるな。開始記号 S から生成される文字列のうち括弧の対応が取れたものだけを用いて称号に用いるのだ」

$$
\begin{aligned}
S \rightarrow &\quad \text{`('}\ S\ \text{`\}'} \\
| &\quad \text{`)'}\ S\ \text{`\{'} \\
| &\quad \varepsilon
\end{aligned}
$$

図 1.2: 例 1(文脈自由文法版)

六花「邪王真眼**小括弧**最強**小括弧閉じ中括弧**最強**中括弧閉じ**[*12]」
勇太「お前、プログラムだとダメなのに BNF だとイケるのか」
六花「邪王真眼**小括弧**最強**小括弧**最強**小括弧閉じ小括弧閉じ中括弧**最強**中括弧**最強**中括弧閉じ中括**

[*10] 邪王真眼{最強}
[*11] 邪王真眼(最強{最強})
[*12] 邪王真眼(最強){最強}

第2章

矢澤にこ先輩と一緒に catamorphism！

— @public_ai000ya

2.1 登場人物

2.1.1 矢澤にこ

各メンバーがそれぞれのプログラミング言語極める集団、μ’ｓに所属するスクールアイドル。
Pure Functional Programming と Haskell を極めるべく、常々鍛錬している。
Haskell 周りの更にニッチな分野が大好き。

2.1.2 東條希

同じくμ’s に所属するスクールアイドル。
にこによって Haskell 漬けにされた。
にこよりは多言語、そして一般的プログラミング寄り。

2.2 導入

にこ「おはよう～、希」
希　「お、にこっち。おはようさん！」
希　「にこっち～、最近なんか面白いことあったりした？」
にこ「そうねー。ここのところは catamorphism について、Haskell で学んでたわ」
希　「catamorphism —カタモフィズム— ？」
にこ「圏の上で考えられる概念なんだけど、畳込み…foldr を形式化できるの」
希　「へ～！」
希　「うち、最近刺激がなくって暇なん。それ刺激強そうやん、詳しくおしえて～な」
にこ「そうねえ、私の復習にもなるし。いいわよ、今日はニコニーの畳み込み講座よ！」

にこ「にこは data-fix[*1] の hackage を見て学んだわ」
にこ「今回解説するコードの全文はここ [*2] にあるわよ」

[*1] https://hackage.haskell.org/package/data-fix-0.2.0/docs/Data-Fix.html
[*2] https://github.com/aiya000/catamorphism-with-nico

2.3　流れについて

にこ「catamorphism は F-始代数っていうモノの上で表現されててね、F-始代数は F-代数っていうモノと一緒に考えられるの」
希　「いきなり概念がいっぱい出てきたなぁ、すごい。F-代数、F-始代数、catamorphism？」
にこ「ええ、アイドルの必修概念ね。大丈夫、今回の話だと、出てくる概念といえばこれくらいだから」
希　「これらが全部って考えると、確かに少ないかも」
にこ「ところで希も Haskell が好きよね。今回はこんな流れで、Haskell コードと解説を交えつつ進めていければと思うわ」
希　「Haskell かな〜やっぱ w」

1. F-代数について
2. F-代数の準同型写像について
3. F-始代数について
4. catamorphism について

2.4　F-代数を Haskell で表す

にこ「改めて確認するけど、希は F-代数、知ってる？」
希　「知らんなぁ。モノイド、群、環とかの仲間？」
にこ「ううん。F-代数は圏の上で考えられる構造だから、それらの代数的構造とは基本が違うかな」
にこ「圏で語れる話だから、数式が苦手な人でも安心ね」
希　「うち、可換図式も好きや〜」
にこ「F-代数の F は、ある自己関手 F のことなの」
希　「Haskell の `Functor F` インスタンス？」
にこ「そうそう」

```
instance Functor F where
  ...
```

にこ「だから例えば自己関手 G に対しては G-代数...みたいに言ったりするわ」
希　「なるほど、F ありきのものやから F-代数なんやね」
にこ「ええ、ある関手 F に対しての F-代数ね」
にこ「F-代数は `(Int, F Int -> Int)` のような、適当な圏の上の、対象と射の組なの」
希　「`F Int -> Int` って不思議な射の形やね」
にこ「そうなのよ、そこがまた面白いのよー」
にこ「F-代数 `(X, F X -> X)` を、言葉を乱用して F-代数 X とか言ったりもするわね」
希　「ふむふむ。『F-代数 Z』って言ったら `(Z, F Z -> Z)` のことを指す...って感じでええ？」
にこ「あってるわ」
にこ「F-代数を Haskell の型クラスで表現してみると...こうね。`f a -> a` があれば `a` の値も 1 つ以上あるはずだから、ここでは `object :: a` みたいなものは要請しないでおくわ」

第3章

チルノのパーフェクト超準解析教室

— @dif_engine

超準解析について，上部構造の議論を抽象化した公理系に基づいて説明します．大学の理数系の学部二年生ぐらいの方を読者として想定しています．具体的には

(1) 記号論理 (命題論理、一階述語論理)
(2) 公理的集合論 (ZFC)

がなんとなく身についていることを想定しています.

超準解析をすでにある程度ご存知の方向けの説明

所謂上部構造を用いた超準解析について解説します．この方式が Robinson and Zakon [26] によって創始されたときには urelement を持つ集合論が用いられていました．これは ZFC のように urelement を持ちえない集合論を「日常語」としている我々にはやや《居心地のわるい》ものです．本記事では，《相対的な原子》を持つ宇宙を公理化して扱い，ZFC の中から出ることなく超準解析を展開します．上部構造の超準解析では，超フィルターを用いた Mostowski 崩壊の構成が述べられるのが通例です [26] [12] が，本記事ではこのあたりの構成を省き，広大化までの超準埋め込みを公理化して扱いました．《移行原理》や《理想化原理》は論理式の書き換え規則ともみなせるものです．数学的主張を自明ではない形に変形しながら行う議論は最初のうち理解するのがやや難しいと思われたので，そのあたりの説明をやや丁寧に行いました．記事の最後には応用として $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to \exp(x) \ \ (n \to \infty)$ の《オイラー風》の証明を超準解析で補強し正当化してみました．すでにある程度超準解析をご存知の方は 3.6 のあたりからお読みいただけるかと思います．(用語や記号の確認のために必要に応じて遡ってください).

3.1 プロローグ

すこし前からこの紅魔館の図書館にちょくちょく訪れることにしている．紅魔館の居候でありながらこの図書館の主のような顔をしているパチュリー・ノーレッジのことでも揶揄おうかと思っていたのだが，あいにくこの日は留守だった——珍しいこともあるものだ．バルザックの『セラフィタ』を読んでいるとチルノが図書館に入ってきた.
彼女はこちらを見つけると六枚の氷翼をはためかせながらこちらに来て，いきなりこう言ったのだった——
「アリス・マーガトロイドさん，超準解析について教えてください！」
こちらが返事を言う暇も与えず，チルノは《超準解析》についてひとしきりまくしたてた．彼女の長広舌を要約すると，どうやら《超準解析によって微積分の話が全部簡単になる》と認識している

定理 3.8.2 数列 $a,b\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)+\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right).$$

Proof. $s:=\lim_{n\to\infty}a_n,\ t:=\lim_{n\to\infty}b_n$ とすると次の (3.83)(3.84) が成立する：

$$\forall\nu\in{}^*\mathbb{N}_\infty\ \ (a_\nu-s\in\mathrm{hal}(0)). \tag{3.83}$$
$$\forall\nu\in{}^*\mathbb{N}_\infty\ \ (b_\nu-t\in\mathrm{hal}(0)). \tag{3.84}$$

命題 3.7.12(2) より：

$$\begin{aligned}&\forall\nu\in{}^*\mathbb{N}_\infty\ \ (a_\nu+b_\nu-(s+t)\in\mathrm{hal}(0)).\\ \Longleftrightarrow\ &\forall\nu\in{}^*\mathbb{N}_\infty\ \ (a_\nu+b_\nu\simeq s+t).\\ \Longleftrightarrow\ &\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=s+t.\end{aligned}$$

□

「上の証明では，数列の極限の性質が光暈の代数的な性質に還元されたことに注意しておく」

3.8.2 閉区間のコンパクト性

$a,b\in\mathbb{R}$ に対して，通常のように区間 $[a,b]$ を次のように定義する：

$$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}.$$

この区間の超準化 ${}^*[a,b]$ を考えてみよう．次のように考えればよい：
命題 3.5.9 により

$${}^*[a,b]=\{x\in{}^*\mathbb{R}\,|\,{}^*a\ \ {}^*\!\!\le\ \ x\ \ {}^*\!\!\le\ \ {}^*b\}$$

$\mathbb{R}\subseteq S$ という仮定により ${}^*a=a,{}^*b=b$ であり，さらに 3.5.6 の議論により ${}^*\!\!\le$ と $\le$ は同一視できるので

$$=\{x\in{}^*\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}.$$

閉区間に関しては次が基本的である：

命題 3.8.3 $a,b\in\mathbb{R}$ に対して：

$$\forall x\in{}^*[a,b]\ \ ({}^\circ x\in[a,b]). \tag{3.85}$$

Proof. 命題 3.7.15(4)(5) より． □

「あとで（定理 3.8.6）見るように，これは（有界な）閉区間のハイネ＝ボレル性の超準的な表現の一種だと考えることができる」
「閉区間 $[a,b]$ のハイネ=ボレル性は《$[a,b]$ の開被覆 $\mathscr{G}$ が与えられると，$\mathscr{G}$ の有限部分集合で $[a,b]$ の開被覆になってるやつがある》ってやつでしたね」
「そのとおり」

3.8.3 連続性

「次の定理は，連続性の超準的な表現を与える」：

定理 3.8.4 $a,b\in\mathbb{R},f\colon[a,b]\to\mathbb{R},x_0\in[a,b]$ とする．このとき次の (1)(2) は同値である：

(1)	f は x_0 で連続.
(2)	$\forall x \in {}^*[a,b] \ \ (x \simeq x_0 \implies f(x) \simeq f(x_0))$.

Proof. $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ 見よ：

$$\begin{aligned}&f \text{ は } x_0 \text{ で連続.}\\ \iff &\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ (|x-x_0| < \delta \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon).\end{aligned}$$

$\Phi := \left\{ \langle \delta, x \rangle \in \mathbb{R}_+ \times [a,b] \,\middle|\, |x-x_0| < \delta \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \right\}$ とすると

$$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ \langle \delta, x \rangle \in \Phi. \tag{3.86}$$

$D := \{\delta\}$ とすれば：

$$\implies \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists D \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(\mathbb{R}_+) \ \exists \delta \in D \ \ \langle \delta, x \rangle \in \Phi. \tag{3.87}$$

理想化原理 (E5") より

$$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in {}^*[a,b] \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ \langle {}^*\delta, x \rangle \in {}^*\Phi.$$

${}^*\delta = \delta, {}^*f = f, {}^*x_0 = x_0$ という同一視により

$$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in {}^*[a,b] \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ (|x-x_0| < \delta \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon).$$

δ についての量化を内側に送り込めば

$$\begin{aligned}&\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in {}^*[a,b] \ \ ((\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ (|x-x_0| < \delta)) \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon).\\ &\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in {}^*[a,b] \ \ (x \simeq x_0 \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon).\end{aligned}$$

先頭の全称量化の順序を交換して整理すれば

$$\iff \forall x \in {}^*[a,b] \ \ (x \simeq x_0 \implies f(x) \simeq f(x_0)).$$

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ (1)⇒(2) の証明は一箇所を除いて同値変形で証明されている．よってその逆を示すには式 (3.87) から式 (3.86) を導けばよい．$\delta' := \min D (\in \mathbb{R}_+)$ とすれば，

$$\forall \delta \in D \ \ \bigl(|x-x_0| < \delta' \implies |x-x_0| < \delta\bigr)$$

であることから次が言える：

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta' \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in [a,b] \ \ \bigl(\langle \delta', x \rangle \in \Phi\bigr).$$

よって示された. □

「なんか見たような議論だなと思ったら，さっきの定理 3.8.1 とほとんど《同じ》ですね」
「そのとおり．さきに進む前に次の補題を用意する」：

補題 3.8.5　$x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathrm{hal}(0)$ とする．このとき次が言える：

$$x \geq \alpha \implies x \geq 0.$$

「この補題に対しては，二つの証明を与える．まずは第一の証明」：
Proof. <u>仮に</u> $x < 0$ だったとすると $0 > x \geq \alpha$ より：

$$\alpha < 0. \tag{3.88}$$

$\varepsilon := -x(> 0)$ とすると $\alpha \in \mathrm{hal}(0)$ であることにより $|\alpha| < \varepsilon$．これを不等式 (3.88) と合わせると $-\varepsilon < \alpha < 0$ となる．よって最初の仮定と合わせると

$$\begin{aligned} & -\varepsilon < \alpha \leq x. \\ \iff & x < \alpha \leq x. \end{aligned}$$

これは起こりえない．よって $x \geq 0$ でなければならない． □

「二番目の証明は，より形式的」:

Proof. 見よ：

$$\begin{aligned} & \exists\alpha \in \mathrm{hal}(0)\ \ (x \geq \alpha). \\ \iff & \exists\alpha \in {}^*\mathbb{R}\ \ (\alpha \simeq 0 \land x \geq \alpha). \\ \iff & \exists\alpha \in {}^*\mathbb{R}\ \ ((\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \ (|\alpha| < \varepsilon)) \land x \geq \alpha). \end{aligned}$$

移行原理により

$$\begin{aligned} \iff & \exists\alpha \in \mathbb{R}\ \ ((\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \ (|\alpha| < \varepsilon)) \land x \geq \alpha). \\ \iff & \exists\alpha \in \mathbb{R}\ \ (\alpha = 0 \land x \geq \alpha). \\ \implies & x \geq 0. \end{aligned}$$

□

「あたいは二番目の証明みたいのが機械的にできて好きかな」

「やり方は一つじゃないから好きな方でやればいい．さて，閉区間上の実数値連続関数に関しては次の定理が有名」:

定理 3.8.6　$a, b \in \mathbb{R}$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ とする．もし f が $[a,b]$ の各点において連続ならば f はこの区間で最大値を取る．

Proof. 実数の有限集合が最大元を持つことは明らか．よって次が言える：

$$\forall F \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}([a,b])\ \ \exists x \in [a,b]\ \ \forall t \in F\ \ \ (f(x) \geq f(t)).$$

理想化原理 (E5”) により

$$\iff \exists z \in {}^*[a,b]\ \ \forall t \in [a,b]\ \ (f(z) \geq f(t)). \tag{3.89}$$

$x_0 := {}^\circ z$ とする．この x_0 が f の最大値を与える点であることをみてゆく．まず，命題 3.8.3 により $x_0 \in [a,b]$ である．また，$x_0 \simeq z$ なので f の連続性により $f(x_0) \simeq f(z)$ である．よって

$$\exists\alpha \in \mathrm{hal}(0)\ \ (f(x_0) = f(z) + \alpha).$$

これを式 (3.89) に代入すると次が得られる：

$$\begin{aligned} & \forall t \in [a,b]\ \ (f(x_0) - \alpha \geq f(t)). \\ \iff & \forall t \in [a,b]\ \ (f(x_0) - f(t) \geq \alpha). \end{aligned}$$

$f(x_0) - f(t) \in \mathbb{R}$ なので，補題 3.8.5 により

$$\implies \forall t \in [a,b]\ \ (f(x_0) - f(t) \geq 0).$$

よって f は $x_0 \in [a,b]$ で最大値を取る． □

「この定理の証明において，z の標準部分 x_0 が再び区間 $[a,b]$ に入ることが重要だったことに注意しておく」